Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione"

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.

Bruno D'Amore – Silvia Sbaragli
N.R.D. - Dipartimento di Matematica - Università di Bologna - Italia
A.S.P. – Locarno - Svizzera

Lavoro eseguito nell'àmbito del Programma di Ricerca: «*Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico*» finanziato con fondi 60% dall'Università di Bologna (Dipartimento di Matematica).

Summary. *Our intention is to clarify the semantics of one of the most common terms in research into Mathematics Education over the past ten years: "misconception". The term is used in many different ways by various authors, for the most part being used with negative connotations as a synonym of "error". In our opinion, on the other hand, it should assume a more constructive connotation, thereby filling a gap. In this way, "an obstacle to learning" is semantically "an impediment to the correct construction of learning", thereby assuming a more meaningful nature: that of preceding knowledge now inadequate in the face of a new situation. From this point of departure, after having examined the origins and meanings of "misconception", we propose a new interpretation of the concept, both more articulate and less negative.*

Resumen. *En este trabajo queremos hacer claridad, desde una perspectiva semántica, de uno de los términos que desde hace decenas de años viene utilizado frecuentemente en la investigación en Didáctica de la matemática: "misconcepción", término que es interpretado de diferentes maneras por varios Autores y que asume simplemente en la mayoría de los casos sentido negativo, como sinónimo de "error". Para nosotros, por el contrario, este término puede asumir una connotación más constructiva, afrontando una laguna; el análogo sería el siguiente: "obstáculo al aprendizaje" es,* *semánticamente, "una barrera respecto a la correcta construcción de un aprendizaje" pero, sin embargo, hoy asume un carácter más significativo, aquel de un conocimiento precedente que no resulta ser adecuado a una nueva situación. Partiendo de esta analogía, después de haber discutido origen y significado de este término, llegamos a proponer una interpretación de "misconcepción" mucho más elaborada y menos negativa.*

Sunto. *In questo lavoro vogliamo fare chiarezza semantica su uno dei termini più usati da alcuni decenni nella ricerca in Didattica della matematica, "misconcezione"; tale termine viene interpretato in molti modi diversi dai vari Autori ed assume semplicemente il più delle volte connotati negativi, come sinonimo di "errore". A nostro avviso, invece, esso potrebbe assumere un connotato più costruttivo, assolvendo ad una lacuna; l'analogo sarebbe il seguente: "ostacolo all'apprendimento" è, semanticamente, una "barriera rispetto alla corretta costruzione di un apprendimento" e tuttavia oggi ha assunto un carattere più significativo, quello di una conoscenza precedente che non risulta essere adeguata ad una nuova situazione. Prendendo spunto da questa analogia, dopo aver discusso origini e significati di "misconcezione", giungiamo a proporre un'interpretazione di "misconcezione" più elaborata e meno negativa.*

1. *Misconception*, una parola che viene dagli USA

La parola inglese *misconception* è interpretata solitamente come "giudizio erroneo", "idea sbagliata", ma anche "equivoco" o "malinteso"; si trova intesa anche nel senso più esteso di "concezione fallace".

Nel *Collins Coubuild English Dictionary for Advanced Learners*, versione 2001, della Harper Collins Publishers, si trova: «A misconception is an idea that is not correct. (…) Synonim: fallacy».

Nell'*Oxford Advanced Learner's Dictionary*, versione 1989, della Oxford University Press, si trova: «Misconception: a wrong idea or understanding of (sth) (…) Cf. Preconception».

Nel *Longman Dictionary of English Language and Culture*, versione 1998, della Addison Wesley Longman, si trova: «Misconception: (an example of) understanding sth wrongly».

L'uso del prefisso *mis* in inglese, d'altra parte, dà sempre una connotazione negativa al termine che lo segue; per esempio,

misinterpretation è “interpretazione erronea”, “malinteso”; mentre il verbo *mistake* è “sbagliare”, “errare”.
Per questa ragione le misconcezioni vengono spesso citate quando si fa riferimento alla didattica relativa agli errori.

2. Primi usi del termine

Molti Autori concordano sul fatto che i primi usi di questo termine, nel senso di “errore” o di “malinteso”, si hanno nel dominio della Fisica o dell’Economia. Si fa infatti riferimento di solito a lavori di Di Sessa (1983); di Kahneman e Tversky (a partire dal 1982) riguardo ai processi decisionali; di Voss et al. (1989).
«I risultati di tali ricerche sono stati ampiamente utilizzati a sostegno dell’ipotesi costruttivista dell’apprendimento, che vede il soggetto protagonista attivo di tale processo, piuttosto che contenitore vuoto da riempire con opportune conoscenze» (Zan, 2000, pag. 48).
Alcune di queste “misconcezioni” sono state interpretate come “stereotipi” (Gardner, 1991).
Schoenfeld (1985) riporta esempi di come il contesto in cui si propongono quesiti possa influenzare le risposte, provocando fraintendimenti, e tali esempi, divenuti oramai dei classici, sono appunto tratti dalla Fisica (McCloskey, 1983).

Una delle prime apparizioni documentate del termine “misconception” in Matematica avviene in USA nel 1981, ad opera di Wagner (1981), in un lavoro che tratta dell’apprendimento di equazioni e funzioni; sempre nel 1981 esce un celebre testo di Kieran (1981) sull’attività di risoluzione delle equazioni. Nel 1982 si pubblica un articolo che appartiene al dominio dell’apprendimento dell’algebra: Clement (1982). Nel 1983 abbiamo lavori di Wagner (1983) e di Kieran (1983) ancora sull’algebra. Appaiono poi numerosi lavori nel 1985 nei quali il termine “misconcezione” è esplicito: Schoenfeld (1985), Shaughnessy (1985) e Silver (1985), che lo usano per lo più a proposito di *problem solving*, insieme alle convinzioni o per spiegarne le interazioni.
In Silver (1985, pagg. 255-256) è detto esplicitamente che vi è un forte legame tra le misconcezioni e le convinzioni errate.
In Schoenfeld (1985, pag. 368) si evidenzia come gli studenti possano sviluppare in modo corretto delle concezioni scorrette, soprattutto per quanto riguarda procedure.

Come si vede bene, nella prima metà degli anni ’80 ci fu un intenso lavoro degli studiosi di Didattica della matematica su questo tema. Lo stesso Fischbein negli anni ’80 e ’90 lavorò in questo campo, usando però solo a volte esplicitamente il termine, specie a proposito dell’apprendimento della probabilità (Fischbein et al., 1991; Lecoutre, Fischbein, 1998).

Interessanti citazioni del termine appaiono in Furinghetti, Paola (1991); in Bonotto (1992), dove è dato come sinonimo di “regola scorretta” (pag. 420); più volte il termine è usato in Arzarello, Bazzini, Chiappini (1994) a proposito dell’apprendimento dell’algebra. In tutti questi lavori il termine è interpretato nel senso negativo acquisito dalla letteratura.

Anche in Gagatsis (2003) si fa ampio uso del termine “misconcezione” nello stesso senso.

Bazzini (1995) sostiene: «Nell’ambito di studi più recenti, un affascinante settore di indagine è quello relativo alla funzione del ragionamento analogico nel processo di ristrutturazione della conoscenza individuale e del superamento di misconcetti (Brown, Clement, 1989)».

Più avanti, la stessa riferisce, citando Fischbein: «Non dobbiamo però dimenticare che se i vari tipi di ragionamento analogico da una parte possono favorire la costruzione di conoscenze, dall’altra possono indurre a conclusioni erronee nel momento in cui vengano enfatizzati o distorti particolari aspetti a svantaggio di altri. Se l’analogia è una potenziale generatrice di ipotesi, può essere anche causa di misconcetti o fraintendimenti (Fischbein, 1987, 1989). Succede spesso che, quando il soggetto si trova in forte incertezza di fronte a un problema da risolvere, è portato a trasformare un certo nucleo di informazioni da un dominio ben conosciuto ad un altro meno noto tramite un trasferimento per analogia. Può avvenire allora che si assumano per valide corrispondenze analogiche che invece non sono plausibili per quei particolari sistemi. Si parla di analogie tacite che possono inserirsi nel processo cognitivo e perturbarlo».

In un testo del 1998, Rosetta Zan parla di misconcezioni come “causa di errori”: «Le *convinzioni specifiche* scorrette (“misconceptions”) sulla Matematica sono quelle responsabili di *errori*, che si presentano in forme diverse e in contesti diversi. Si tratta spesso di convinzioni implicite, di cui cioè il soggetto non è consapevole, e per questo agiscono in modo ancora più subdolo e sottile» (Zan, 1998).

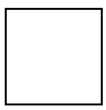
La stessa Autrice, nel 2000, afferma: «Misconcetti, misconcezioni, concezioni errate, fraintendimenti, sono i termini italiani utilizzati in letteratura in corrispondenza del termine inglese "*misconceptions*"» (Zan, 2000).
Ancora la stessa Autrice, nel 2002, ribadisce l'importanza di tale campo di studio all'interno del particolare filone di ricerca relativo all'interpretazione di errori, sostenendo come il termine "misconcezione" sia spesso sostituito da espressioni alternative, pur rimanendo, al di là del nome, un fondamentale campo di studio per la ricerca in Didattica: «Se i comportamenti fallimentari causano errori, l'individuazione dei comportamenti fallimentari riconduce al classico filone di ricerca – trasversale – che è dato dall'interpretazione di errori. Appaiono interessanti in questo senso tutti i contributi che avanzano ipotesi interpretative sull'origine degli errori sistematici: in particolare quelli sui 'misconcetti'»[1] (Zan, 2002).
L'Autrice non riporta le cause dell'abbandono del termine originario "misconcezione", ma tale scelta sembra dipendere proprio dalla vastità di interpretazioni della parola "misconcezione", spesso citata in diversi contesti in modo ingenuo ed intuitivo, senza essere stata inquadrata precisamente all'interno degli specifici àmbiti scientifici. Anche per questa ragione riteniamo utile fare chiarezza sull'uso di questo termine in Didattica della matematica.
L'esempio presentato da Zan (2002) relativo agli errori sistematici,[2] inquadrato dalla letteratura successiva come misconcezioni,[3] si riferisce alle ricerche di Brown e Burton (1978) riguardanti la sottrazione:
«Un *bug* piuttosto tipico si può riscontrare nello svolgimento delle seguenti operazioni:

[1] In realtà si evita sempre più spesso di usare il termine originario *misconceptions*, preferendo espressioni alternative quali *alternative conceptions* o *implicit theories*. Sul motivo di questa scelta dovremo a lungo intervenire; per completezza accenniamo solo al fatto che si vuol evitare la connotazione del tutto negativa che quel "*mis*" comporta e comunque che si vuole evidenziare una certa qual varietà di interpretazioni. Noi finiremo con il dare una "definizione" problematica tutt'altro che negativa di questo termine.
[2] Gli errori sistematici vengono chiamati in Brown e Burton (1978): *bugs*.
[3] Anche Fischbein (1992c) in un paragrafo intitolato: "Errori e misconcetti" parla dei bugs, ossia degli errori sistematici, senza però usare esplicitamente nel testo la parola "misconcetti".

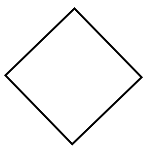
278-	352-	406-	543-	510-	1023-
135=	146=	219=	367=	238=	835=
143	214	213	224	328	1812

L’errore è sistematico e appare una *modificazione plausibile della procedura standard*: “in ogni colonna si sottrae *sempre* la cifra più bassa da quella più alta, indipendentemente dalla posizione”.
Secondo Brown e Burton spesso il comportamento generale descritto deriva dal bisogno del bambino di controllare situazioni percepite come nuove: egli comincia con i casi che già conosce, facendone modifiche plausibili. In questo senso il bambino si comporta come uno scienziato, anche se, a differenza dello scienziato, egli non è consapevole di generalizzare, ma, soprattutto, generalizza in base a caratteristiche superficiali e non ai significati» (Zan, 2002).
Si percepisce in questo esempio una interpretazione non del tutto negativa del comportamento del bambino; egli, sì, commette un errore sistematico, ma questo deriva da una conoscenza che, in precedenti situazioni, si è rivelata efficace.
Su questo punto investiremo molta attenzione, successivamente.

Altri classici esempi di misconcezioni, per esempio riportati in Zan (1998), sono i seguenti:
«“Se moltiplico due numeri il risultato è maggiore di entrambi.”
Questa, e la convinzione “simmetrica” sul risultato di una divisione (che deve essere più piccolo del dividendo), produce gravi conseguenze in molti contesti. Tipico il caso dei problemi di proporzionalità, nei quali la presenza di numeri decimali minori di 1 “blocca” strategie utilizzate in modo naturale con numeri interi.
Altri esempi:
“Questo è un quadrato:



… ma questo è un rombo:



”

"Siccome 31>5, allora 0,31>0,5".
A livello superiore una convinzione implicita molto forte e diffusa è:
"Un numero è negativo se e solo se nella sua rappresentazione simbolica compare esplicitamente il segno –".
Alcune conseguenze di tale convinzione sono:
- la confusione fra integrali e area;
- log (-x) non è mai definito;
- un punto generico del terzo quadrante è (-x; -y), x, y $\in$ R».

Questi ed altri esempi di misconcezioni sono spesso proposti dalla letteratura (per esempio in D'Amore, 1999).

Il concetto di misconcezione non fu definito in termini precisi al momento del suo ingresso nel mondo della ricerca in Didattica della matematica, ma, come si è visto, è stato usato nel suo senso intuitivo e continua ad esserlo tuttora:
«Lo studio si basa sull'ipotesi che solo portando i futuri insegnanti ad esplicitare le loro convinzioni circa l'algebra sia possibile mettere a nudo loro eventuali rigidità concettuali, misconcezioni, carenze culturali, difficoltà, in modo tale da avviare discussioni e confronti che li portino ad acquisire consapevolezza delle loro lacune e, attraverso percorsi operativi mirati, giungere ad una ristrutturazione delle loro conoscenze e opinioni» (Malara, 2003).

Facendo riferimento ai misconcetti, Robutti (2003) sostiene:
«La ricerca in Educazione Matematica e Fisica ha fornito negli anni numerosi studi relativi a problemi di insegnamento-apprendimento, tra cui quello della costruzione e dell'interpretazione di grafici risulta essere uno dei più difficili. Nell'ambito di questa problematica, sono numerosi i misconcetti, i fraintendimenti, gli errori, che si presentano a tutti i livelli di età e tipi di scuole, compreso quello universitario. Si può pensare per esempio al misconcetto chiamato *graph as a picture (GAP)*, che consiste nella confusione tra il grafico e il fenomeno stesso. Se si tratta di un moto, la confusione è tra la traiettoria e la legge oraria; essa conduce gli studenti a interpretare per esempio un grafico spazio-tempo come una traiettoria compiuta dall'oggetto in movimento» (e qui l'Autrice cita: Berg, Phillips, 1994; Clement, 1989).

Diversi studiosi hanno però preso in esame in maniera critica il sostantivo, per esempio nell'àmbito della Scuola Francese;[4] in una lettera privata che ci ha gentilmente autorizzato a rendere pubblica, Colette Laborde dichiara:
«Il termine misconcezione che ha origine negli Stati Uniti potrebbe non essere il termine più appropriato se ci si riferisce alla conoscenza degli studenti "non corretta". La nozione di "correttezza" non è assoluta e si riferisce sempre ad un dato sapere; il sapere di riferimento può anche evolversi. I criteri di rigore in Matematica sono cambiati considerevolmente nel tempo. Ogni concezione ha un suo dominio di validità e funziona per quel preciso dominio. Se questo non avviene, la concezione non sopravvive. Ogni concezione è in parte corretta e in parte non corretta. Quindi sembrerebbe più conveniente parlare di concezioni rispetto ad un dominio di validità e cercare di stabilire a che dominio queste appartengono».
Questa cautela ci trova del tutto d'accordo ed anzi mostreremo in **5.** e **6.** come le nostre interpretazioni siano, da parecchi anni, indirizzate proprio in questo senso. Di più, mentre la Laborde sembra fondare la sua analisi sulla Storia e l'Epistemologia, noi vi aggiungiamo come base critica la stessa Didattica.

Tenuto conto delle posizioni dei diversi Autori e delle occorrenze a volte anche piuttosto diverse di questo termine, riteniamo che l'attenzione sulle misconcezioni, fin dal loro apparire nel mondo delle scienze (non matematiche) sia stato molto produttivo perché ha costretto gli studiosi a non identificare più gli errori come qualche cosa di assolutamente negativo, da evitare a tutti i costi, ma come a prodotti umani dovuti a situazioni in via di evoluzione. Sempre più, negli anni, si è venuto a delineare un significato condiviso di "misconcezioni" come cause di errori o meglio ancora cause *sensate* di errori, cause che sono spesso ben motivabili ed a volte addirittura convincenti.
È dunque innegabile il fatto che questo tipo di studi ha costretto a prendere in esame l'interpretazione della realtà da parte del soggetto, interpretazione creata sulla base di convinzioni maturate anche grazie

[4] Tuttavia, in una nota a pagina 265, Artigue (1990), all'interno di un famoso articolo su *Epistemologia e Didattica*, evoca il termine "misconception" senza commenti.

all'apprendimento. Dunque a vedere le misconcezioni come il frutto di una conoscenza, non come una assoluta mancanza di conoscenza.

3. Analogie semantiche con l'idea di "ostacolo"

Anche il termine "ostacolo" presenta una differenza sostanziale tra la sua idea semantica intuitiva e la sua connotazione specifica, universalmente assunta oggi in Didattica della matematica.
La parola "ostacolo" segnala in origine qualche cosa che si oppone ad un cammino, anche in senso figurato o metaforico, che costituisce un "impedimento", un "contrasto". Dunque, in prima approssimazione, sembrerebbe indicare qualche cosa di negativo in assoluto. Nel caso della costruzione di conoscenza, dunque, corrisponderebbe, in modo ingenuo, a qualche cosa che impedisce o tenta di impedire tale costruzione.
Ma Guy Brousseau a partire dal 1976 (Brousseau, 1976-1983) ci ha insegnato che "ostacolo" non è necessariamente una "mancanza di conoscenza", bensì una "conoscenza".[5] Questo modo di intendere il termine: *ostacolo*, era stato ripreso da studi filosofici di Gaston Bachelard (1938). Vediamo di che si tratta.
Da "ostacolo" funziona un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi (anche solo cognitivi) precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di conservarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.
In particolare, Brousseau fornisce (in quel primo lavoro ed in successivi) alcune caratteristiche degli ostacoli:

- bisogna sempre tener presente che un ostacolo non è una mancanza di conoscenza, ma una conoscenza;
- l'allievo usa questa conoscenza per dare risposte adatte in un contesto noto, già incontrato;

---

[5] L'idea di ostacolo è stata sistemata in modo definitivo negli anni successivi alla sua introduzione (Perrin-Glorian, 1994, pagg. 112-115 e oltre).

- se l'allievo tenta di usare questa conoscenza fuori dal contesto noto, già incontrato, fallisce, generando risposte scorrette; ci si accorge allora che si necessita di punti di vista diversi;
- l'ostacolo produce contraddizioni, ma lo studente resiste a tali contraddizioni; sembra allora necessitare di una conoscenza più generale, maggiore, più approfondita, che generalizzi la situazione nota e risolta, e che comprenda la nuova nella quale si è fallito; bisogna che questo punto venga reso esplicito e che lo studente se ne renda conto;
- anche una volta superato, in modo sporadico l'ostacolo riappare.

Da questo punto di vista è di estremo interesse la posizione secondo la quale, come scrive Federigo Enriques (1942),[6] l'errore «non appartiene né alla facoltà logica né all'intuizione, [ma] s'introduce nel momento delicato del loro raccordo».
L'errore, dunque, non è necessariamente solo frutto di ignoranza, ma potrebbe invece essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successo, che ha prodotto risultati positivi, ma che non tiene alla prova di fatti più contingenti o più generali.
Dunque non si tratta sempre di errore di origine sconosciuta, imprevedibile, ma della evidenziazione di ostacoli nel senso sopra citato.
Queste considerazioni hanno portato la ricerca in Didattica della matematica a rivalutare in modo molto diverso dalla prassi usuale l'errore ed il suo ruolo.

Attraverso l'esempio di "ostacolo", ci premeva mostrare come, già in passato, un'idea che nasce da un termine con accezioni ingenue del tutto negative, cambi radicalmente il suo significato al momento di entrare a far parte di un contesto scientifico più preciso.
È nostra intenzione, in questo testo, proporre un'interpretazione di misconcetto o misconcezione che superi le caratteristiche negative, anche se non del tutto assolute, del suo uso originario, di derivazione USA, per adattarsi alle esigenze dell'apprendimento della Matematica, nello stesso modo in cui la parola "ostacolo" vi si è adattata, cambiando

---

[6] Per rintracciare questo articolo nella letteratura, bisogna cercare come autore Adriano Giovannini, lo pseudonimo che Enriques fu costretto ad usare sotto il regime fascista, per fuggire alle persecuzioni razziali e soprattutto per poter continuare a pubblicare, cosa che gli era allora proibita. Si ha allora la citazione (Giovannini, 1942).

addirittura il suo senso originario più spontaneo. Noi abbiamo fatto questa proposta semantica già dagli anni '90 e l'abbiamo sottoposta a prove di coerenza e di efficacia, ottenendo risultati che ci hanno ampiamente confortato, tanto da proporla qui, in maniera esplicita e consapevole.
Anche Zan (2002) parla dell'importanza didattica di tale concetto; riferendosi alle misconcezioni afferma:
«Gli studi in quest'area sono accomunati dall'enfasi su alcuni aspetti, che li differenzia in modo netto dagli studi precedenti sull'analisi degli errori (…):

- la motivazione a capire le radici dei misconcetti, e non solo ad eliminarli
- lo sforzo di assumere il punto di vista di chi apprende, piuttosto che quello dell'esperto
- l'accettazione della ragionevolezza dei misconcetti e quindi la necessità che l'allievo ne percepisca i limiti come pre-requisito per modificarli» (Zan, 2002).

4. Modelli intuitivi

Per arrivare alla nostra proposta, dobbiamo richiamare qui alcune note idee di Efraim Fischbein (1985a,b; 1992a) relativamente ai *modelli intuitivi*.
Si riserva il nome di *modello intuitivo* a quei modelli che rispondono pienamente alle sollecitazioni intuitive e che hanno dunque un'accettazione immediata forte.
Seguendo le parole di Fischbein (1985a):
«Il livello intuitivo si riferisce alla *dinamica dell'accettazione soggettiva di un enunciato matematico come cosa evidente e certa*».[7]
Di conseguenza: «Il termine "intuitivo" può avere, nei confronti dei modelli, due significati distinti tra loro connessi: uno è il significato generale di rappresentazione pittorico - comportamentale, l'altro si riferisce più specificamente alla capacità che certi modelli hanno di suggerire direttamente una soluzione come quella che si impone per la sua evidenza».

[7] Qui e nel seguito i corsivi delle frasi di Fischbein replicano quelli dell'Autore.

È in questo tipo di modello che si crea subito una corrispondenza diretta tra la situazione proposta ed il concetto matematico che si sta utilizzando.
Anticipiamo qui in parte il nostro punto di vista: questo modello si crea di solito come conseguenza della proposta da parte dell'insegnante di un'immagine forte e convincente di un concetto, che diventa persistente, confermata da continui esempi ed esperienze.
Si possono formare cioè dei modelli che finiscono con l'avere molta forza di persuasione e molta rilevanza nelle competenze dell'allievo: in altre parole sono dominanti sul piano intuitivo proprio grazie a questa rispondenza tra situazione descritta e Matematica utilizzata per farlo:
«Un modello intuitivo (…) induce sempre effetti di accettazione immediata. (…) Se il modello è realmente buono e se è stato realmente ben compreso, le sensazioni di evidenza e di certezza sono imposte dal modello stesso come un fatto globale colto in un'unica comprensione sintetizzante» (Fischbein, 1985a).
Ma non è detto che questo modello rispecchi il concetto in questione; in questo caso ci si scontra, talvolta, con modelli creatisi con la ripetizione, ma niente affatto auspicati:
«L'esistenza di incompatibilità e di contraddizione nelle relazioni tra il livello concettuale e il fondamento intuitivo rappresenta una delle principali fonti di idee sbagliate e di errori nell'attività matematica dei bambini» (Fischbein, 1985a).
Si verifica spesso che, in situazioni nelle quali non c'è un esplicito richiamo ad una competenza cognitiva forte, il modello intuitivo di un concetto emerge con energia. Si può ipotizzare infatti che, anche quando lo studente più evoluto si è costruito un modello corretto di un concetto, modello assai vicino al sapere matematico, in condizioni di normalità il modello intuitivo riappare, dimostrando la sua persistenza.
Come sostiene Fischbein (1985a):
«L'insistere eccessivamente nel fornire suggerimenti intuitivi usando rappresentazioni artificiali e troppo elaborate può fare più male che bene. Chiaramente la Matematica è una scienza formale: la validità dei suoi concetti, enunciati e ragionamenti è basata su fondamenti logici; le argomentazioni non possono essere sostituite da processi intuitivi. Gli studenti devono divenire consapevoli di questo punto essenziale e devono imparare a pensare in questo modo specifico. Ciò significa che devono abituarsi ad accettare concetti o enunciati che *non hanno alcun*

significato intuitivo. Forzando eccessivamente l'introduzione di interpretazioni intuitive per ogni concetto matematico, si riesce soltanto a impedire la comprensione della specificità della Matematica. *Ma, d'altra parte, dobbiamo essere consapevoli che noi tutti* (bambini, insegnanti e matematici!) *abbiamo la tendenza naturale ad attribuire ad ogni concetto o enunciato un'interpretazione intuitiva*, cioè un'interpretazione che, *per quanto possibile,* presenti il corrispondente concetto o enunciato come qualcosa di accettabile in modo immediato, evidente, comportamentale».

Per esempio, avendo accettato il modello intuitivo di moltiplicazione tra naturali ed avendolo erroneamente esteso a tutte le moltiplicazioni, modello intuitivo rafforzato dalle raffigurazioni schematiche (cosiddetto *per schieramento*), si forma quel modello "parassita" che si può enunciare così: la moltiplicazione accresce sempre.

Questo discorso di Fischbein vale in generale e non solo nel caso dell'operazione di moltiplicazione; analogo è il modello "parassita" della divisione che "diminuisce sempre". Inoltre, per quanto concerne la divisione, se non si conosce un po' di Didattica della matematica, si può correre il rischio di dare allo studente un altro modello intuitivo che finirà con il produrre un modello indesiderato: in una divisione A:B, il numero B *deve* essere minore del numero A (Fischbein, 1985b; Deri, Sainati Nello, Sciolis Marino, 1983; D'Amore, 1993; D'Amore 1999).

Questi sono solo due dei numerosi esempi proposti da Efraim Fischbein (1985b; 1992a,b) nei quali l'Autore mette in evidenza il seguente fondamentale aspetto:

«Di conseguenza si può supporre che siano proprio i numeri e le relazioni tra essi a bloccare o a facilitare il riconoscimento dell'operazione di divisione come procedura risolutiva. Ogni operazione aritmetica possiede, oltre al suo significato formale, anche uno o più significati intuitivi. I due livelli possono coincidere oppure no».

Inoltre, per quanto riguarda l'addizione, Fischbein, raccogliendo un'idea di Gérard Vergnaud (1982), mette in evidenza un ulteriore esempio di non coincidenza tra significato formale e significato intuitivo proponendo una famosa terna di problemi additivi a una tappa (cioè problemi che si risolvono con una sola operazione di addizione) che appare citata in moltissimi testi e che è presente e discussa anche in D'Amore (1993) e Billio et al. (1993).

La sottrazione, poi, per sua stessa natura, presenta almeno due diversi significati intuitivi, a fronte di un unico significato formale; tali significati intuitivi si possono evidenziare ricorrendo ancora a due problemi suggeriti da Fischbein (1985b) che si risolvono entrambi con una sottrazione; ma, in un caso, quello che ha come significato il *togliere via* (come lo chiama Fischbein), la cosa è intuitiva perché c'è coincidenza tra significato formale e significato intuitivo; nell'altro caso, quello del *completamento a*, sembra essere più spontaneo il ricorso a strategie additive. [Altri esempi in questo senso sono presenti in D'Amore (1999)].
Seguendo il pensiero di Fischbein (1985b):
«Quando si cerca di risolvere un problema non ci si affida soltanto al livello algoritmico, anche se tutto il bagaglio di algoritmi necessari è virtualmente presente nella mente. Come abbiamo già sottolineato, il processo risolutivo comprende anche il contributo delle rappresentazioni intuitive. Quando l'algoritmo e il livello intuitivo lavorano in accordo si ottiene una semplificazione. In questo caso il ruolo della rappresentazione intuitiva non si nota neppure, ma se tra i due livelli c'è una relazione di conflitto, l'incidenza degli aspetti intuitivi diventa evidente».

5. Una proposta semantica per il termine *misconcezione*

Nel paragrafo precedente abbiamo parlato di "immagine" e di "modello" lasciandoli all'intuizione. Intendiamo ora precisare tale terminologia seguendo l'impostazione di D'Amore (1999, pag. 151; 2002; 2003) per poter inquadrare la nostra proposta semantica del termine "misconcezione".
Immagine mentale è il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione interna o esterna. L'immagine mentale è condizionata da influenze culturali, stili personali, in poche parole è un prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Essa può essere elaborata più o meno coscientemente (anche questa capacità di elaborazione dipende però dall'individuo), tuttavia l'immagine mentale è interna ed almeno in prima istanza involontaria. L'insieme delle immagini mentali elaborate (più o meno coscientemente), tutte relative ad un certo concetto, costituisce il *modello mentale* (interno) del concetto stesso.

Ossia, lo studente si costruisce un'immagine di un concetto che crede stabile e definitiva; ma, ad un certo punto della sua storia cognitiva, riceve informazioni sul concetto che non sono contemplate dall'immagine che possedeva. L'allievo deve allora adeguare la "vecchia" immagine ad una nuova, più ampia, che oltre a conservare le precedenti informazioni, accolga anche le nuove, costruendosi così una nuova immagine del concetto. Si crea così un *conflitto* (D'Amore, 1999, pag. 123; 2003) tra la precedente immagine, che lo studente credeva definitiva, relativamente a quel concetto, e la nuova; ciò accade specialmente quando la nuova immagine amplia i limiti di applicabilità del concetto, o ne dà una versione più comprensiva. Dunque, il *conflitto cognitivo* è un conflitto "interno" causato dalla non congruenza tra due concetti o tra due immagini o tra un'immagine ed un concetto.

Alla base dei conflitti vi sono delle *misconcezioni*, che in questa prospettiva per noi sono delle "concezioni momentaneamente non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica" (D'Amore, 1999, pag. 124). Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione.

Pur se continueremo nell'uso oramai diffuso di usare il termine "misconcezione", si potrebbe pensare di denominarle invece "concezioni personali" proprio per evidenziarne il carattere costruttivo non necessariamente legato a fatti negativi,

Si può notare come, almeno in taluni casi, alcune immagini possono essere delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni personali (diverse da quelle auspicate) delle informazioni ricevute. Chiamarle "*errori*" è troppo semplicistico e banale; in un certo senso, dato che anche i bambini molto piccoli hanno concezioni matematiche ingenue ma profonde (Aglì, D'Amore, 1995; D'Amore et al., 2004) ottenute empiricamente o per scambio sociale, si potrebbe addirittura pensare che tutta la carriera scolastica di un individuo, per quanto attiene la Matematica, sia costituita dal passaggio da misconcezioni a concezioni più evolute; esse sembrano cioè un momento delicato *necessario* di passaggio, da una prima concezione elementare, ingenua, spontanea, primitiva, ad una più elaborata e comprensiva.

Tale situazione può ripetersi più volte durante la "storia scolastica" di un allievo. Molti dei concetti della Matematica sono raggiunti grazie a passaggi, nel corso degli anni, da un'immagine ad un'altra più potente e si può immaginare questa successione di immagini come una specie di scalata che si "avvicina" al concetto.
Ad un certo punto di questa successione di immagini, c'è un momento in cui l'immagine ottenuta "resiste" a sollecitazioni diverse e si dimostra abbastanza "forte" da includere tutte le argomentazioni e informazioni nuove che si incontrano rispetto al concetto che rappresenta. Un'immagine di questo tipo forte e stabile, si può chiamare *modello* del concetto.
"Farsi un modello di un concetto", dunque, significa rielaborare successivamente immagini deboli e instabili per giungere ad una di esse definitiva, forte e stabile.
Si possono verificare due casi:
- *il modello si forma al momento giusto* nel senso che si tratta davvero del modello atteso, auspicato in quel momento, proprio quello previsto per quel concetto dal Sapere matematico al momento in cui si sta parlando; in questo caso, l'azione didattica ha funzionato e lo studente si è costruito il modello atteso del concetto;
- *il modello si forma troppo presto*, quando ancora avrebbe dovuto essere solamente un'immagine debole che necessitava di essere ulteriormente ampliata; a questo punto per l'allievo non è facile raggiungere il concetto perché la stabilità del modello è di per sé stessa un ostacolo ai futuri apprendimenti.

In un certo senso, le immagini-misconcezioni, essendo in continua evoluzione nella complessa scalata verso la costruzione di un concetto (D'Amore, 1999, 2001), non sempre risultano di ostacolo all'apprendimento futuro degli allievi, a meno che esse non diventino forti e stabili *modelli* indesiderati di un concetto (Sbaragli, 2005).
Più "forte" è il modello intuitivo, più difficile è infrangerlo per assimilare e accomodare una nuova immagine più comprensiva del

concetto.[8] In questi casi, le misconcezioni, che potrebbero non essere considerate in senso negativo, se viste e proposte come momento di passaggio, diventano ostacoli per i successivi apprendimenti e difficili da superare.
Didatticamente conviene quindi lasciare immagini ancora instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi, vicini al Sapere matematico che si vuole raggiungere.

L'esplicitazione, da parte dell'allievo, di una misconcezione avviene con quella *segnalazione di un malessere cognitivo* che si chiama usualmente e banalmente "errore": lo studente sbaglia, cioè non dà la risposta attesa dall'insegnante.
Dare agli *errori* una sola connotazione negativa e non interpretarli come segnali di malessere cognitivo, appunto, è troppo semplicistico e banale: non si tratta solo di valutare negativamente lo studente che sbaglia; si tratta, invece, di dare gli strumenti necessari per l'elaborazione critica.
Ci serviamo ancora di Fischbein:
«Eventuali conflitti tra il livello intuitivo, il livello algoritmico e il livello formale non possono essere eliminati ignorando semplicemente il livello intuitivo. A nostro parere, così come avviene nei processi psicoanalitici, lo studente deve essere aiutato a prendere coscienza di tali conflitti. Ciò può essere fatto discutendo con gli studenti gli errori dovuti specificatamente all'intuizione e cercando insieme a loro l'origine di questi errori. In ogni caso questo processo di chiarificazione verbale non è sufficiente. Gli studenti devono sviluppare la capacità di analizzare le loro risposte, di rendere esplicite il più possibile le loro supposizioni implicite, di usare le strategie formali per verificare tali supposizioni intuitive» (Fischbein, 1985b, pag. 130).
Sta all'adulto, al docente, rendersi conto che quelli che lo studente crede essere concezioni corrette, sono in realtà delle misconcezioni.
Si tratta allora di non dare informazioni distorte e sbagliate; non solo non darle in modo esplicito, ma addirittura evitare che si formino autonomamente per non favorire l'insorgere di modelli "parassiti", in quanto accomodare un modello "parassita" trasformandolo in un nuovo

---

[8] Alla base di questo tipo di problematiche, poniamo alcuni studi di Piaget sui processi di equilibrazione ed accomodamento ed in particolare una delle sue ultime opere dedicata a questo tema (1975), anche se oggi c'è stata una grande evoluzione di ricerche in questo campo (D'Amore, 1993).

modello comprensivo di una diversa situazione non è affatto facile, dato che il modello è per sua stessa natura forte e stabile.
Esempi in questo senso sono presenti in D'Amore (1999) e Sbaragli (2005). In quest'ultimo lavoro si delinea una distinzione tra i diversi tipi di misconcezioni: "evitabili" e "inevitabili".
Le misconcezioni "evitabili" derivano *direttamente dalla trasposizione didattica del sapere*, in quanto sono, appunto, una diretta conseguenza delle scelte degli insegnanti. Queste misconcezioni dipendono dalla prassi scolastica "minata" da improprie consuetudini proposte dagli insegnanti ai propri allievi. D'altra parte, afferma Zan: «Si può riconoscere che nella formazione delle convinzioni ha una notevole responsabilità il tipo di insegnamento ricevuto» (Zan, 1998).
Le misconcezioni "inevitabili" derivano solo *indirettamente dalla trasposizione didattica*, essendo imputabili alla necessità di dover partire da un certo sapere per poter comunicare, sapere iniziale che non potrà mai essere esaustivo dell'intero concetto matematico che si vuol proporre. In questo caso, le misconcezioni possono essere viste come *inevitabili* momenti di passaggio nella costruzione dei concetti.
L'obiettivo didattico da porsi deve quindi mirare alla strutturazione coerente e significativa dell'*ingegneria didattica* (Artigue, 1989, 1992) che deve essere pensata e organizzata dall'insegnante in modo da aiutare a "combattere" i contrasti causati dall'ambiente o ìnsiti in esso, nel tentativo di non creare misconcezioni "evitabili" e di superare misconcezioni "inevitabili", allo scopo di favorire una efficace costruzione dei concetti matematici.
Appare ovvio che la distinzione tra misconcezioni "inevitabili" ed "evitabili" rimandi a quella tra ostacoli epistemologici e didattici.

6. Un solo esempio concreto di "misconcezione" in Didattica della matematica; il caso della moltiplicazione

Presentiamo in questo paragrafo **6.** un solo esempio di uso del senso di "misconcezione" dato in **5.** L'esempio è scelto in modo critico, proprio per mostrarne le peculiarità in senso didattico, storico ed epistemologico. Analoghi esempi potrebbero essere fatti in quantità.

Sappiamo dalla letteratura che la formazione prematura di un modello concettuale di moltiplicazione quando si ha a disposizione solo l'insieme N dei numeri naturali genera spesso misconcezioni quando si passa ad un altro insieme numerico, tra le quali la più conosciuta e difficile da superare è quella segnalata da noi in questo stesso articolo: il prodotto è maggiore dei fattori. Ad esempio, il tentativo di continuare ad applicare tale modello quando la moltiplicazione viene eseguita sull'insieme Q dei numeri razionali si rivela fallimentare. Risulterebbe allora utile didatticamente lasciare immagini in continua evoluzione cercando di non creare troppo presto modelli forti e stabili.

Per entrare più in dettaglio, consideriamo l'insieme N dei numeri naturali; sia $\times$ l'ordinaria moltiplicazione definita in N (interna).

L'immagine concettuale che viene proposta per tale operazione si fonda su due specifici riferimenti espliciti:

- formale: la moltiplicazione è definita come un'addizione ripetuta (cioè 5×3 è 5+5+5)
- grafica: la moltiplicazione è rappresentata graficamente da un rettangolo di punti-unità (per esempio 5×3 è rappresentata da 3 file di 5 punti-unità).

La moltiplicazione in N, qualora dovesse limitarsi ad N e non dovesse essere estesa a Q, non crea le tipiche misconcezioni segnalate da decenni dai ricercatori a questo proposito; ad esempio, la misconcezione più diffusa, così come noi l'abbiamo espressa, in N è una concezione vera: effettivamente, in N, il prodotto è sempre maggiore dei fattori (a parte il caso in cui siano coinvolti numeri assai speciali come 0 ed 1).

Come abbiamo già evidenziato, questa misconcezione è basata principalmente sul fatto che la peculiarità più evidente ed intuitiva della moltiplicazione in N, cioè il fatto che il prodotto è maggiore dei singoli fattori, viene meno in Q.

Sia la "giustificazione formale", sia quella "grafica" perdono di senso quando uno dei due fattori è un numero del tipo 0.2:

- che senso ha giustificare l'operazione 5×0.2 considerando l'addizione di 5 a sé stesso per 0.2 volte?
- che senso ha giustificare la stessa operazione 5×0.2 considerando 0.2 file di 5 unità?

Secondo alcuni Autori, sarebbe allora opportuno cambiare nome e simbolo alla moltiplicazione. Effettivamente, l'idea di conservare nome e simbolo avviene, il più delle volte, dopo che lo studente potrebbe essersi oramai fatto un modello (stabile, duraturo) dell'operazione $\times$ in N, "arricchito" dunque oramai ineluttabilmente dalla misconcezione che

lo accompagna e che diventa “parassita” in Q. Questi Autori suggeriscono tale espediente didattico sulla base della convinzione che l’operazione di “moltiplicazione” definita in Q non è la stessa di quella prima definita in N.
La nostra proposta di terminologia si basa essenzialmente sul fatto che la storia e la prassi ci insegnano a denominare sempre “moltiplicazione” quella/e operazione/i, sia che sia/no definita/e in N che in Q.
Bisogna semplicemente riconoscere che $(N, \times_N)$ è una struttura isomorfa ad una sottostruttura di $(Q, \times_Q)$, il che costituisce un esempio facilmente dominabile di uno dei momenti più interessanti della Matematica e della costruzione del pensiero matematico: l’estensione da una struttura ad un’altra. Detto ciò, ha senso storico, epistemologico e didattico pensare che la moltiplicazione in Q sia un’estensione che conserva il nome della moltiplicazione in N. Il che rende lecito uniformare $\times_N$ e $\times_Q$ nell’unico simbolo usuale $\times$.
Accettato questo, assume grande rilevanza didattica il passaggio della operazione di moltiplicazione da N a Q, un’operazione che conserva il nome giacché si tratta di una estensione.
Certo, questa scelta, peraltro la più seguita, genera qualche problema didattico di costruzione di immagini prima, di modelli poi, al momento opportuno, con le conseguenti problematiche relative alla formazione di misconcezioni che, per non avere pesanti ripercussioni negative, devono restare al livello di immagini e non diventare modelli.[9]
Se ciò avviene, questo tipo di misconcezioni “inevitabili” sono da noi interpretate non come errori definitivi e del tutto negativi, come fraintendimenti ineludibili e non superabili, ma come momento di passaggio, errori momentanei, sotto controllo dal punto di vista del docente, in attesa di sistemazione.
Proprio per questo la nostra proposta semantica si rivela intrinsecamente coerente e coerente anche con il processo di assimilazione ed accomodamento di Piaget.

---

[9] Non vogliamo entrare nello specifico di questo esempio, tuttavia facciamo notare che molti Autori, tra i quali Fischbein, 1992b, insistono sulla necessità di mostrare diversi modelli per l’operazione di moltiplicazione (ma il discorso vale in generale). Tuttavia, nelle condizioni di apprendimento scolastico, bisogna mettere in conto una certa inevitabilità della nascita di misconcetti e dunque sviluppare processi di controllo per conoscerli e riconoscerli negli allievi.

Restano due considerazioni finali.

La prima.
Noi riteniamo che l'apprendimento in Matematica consti di almeno 4 componenti ben distinte ma non del tutto separate l'una dall'altra (Fandiño Pinilla, 2005):

- apprendimento concettuale (noetica)
- apprendimento algoritmico
- apprendimento strategico (risolvere problemi, fare congetture, saper dimostrare, …)
- apprendimento comunicativo (saper comunicare, definire, validare,…).

Così come si fa in letteratura, anche noi abbiamo posto l'accento sulla misconcezione esclusivamente riferita al primo punto; ma nulla ci vieta di pensare che, cambiando quanto vi sia da cambiare, non si possa parlare di misconcezione negli altri tre punti, adattando bene situazioni e terminologie.

La seconda.
Seguendo le orme di Bachelard, anche a noi piace vedere la misconcezione come un'occasione che ha favorito lo sviluppo scientifico (Giovannini, 1942). Ci sembra che, in futuro, bisognerà capire bene come e perché la misconcezione ha un ruolo analogo, in didattica, nel favorire l'apprendimento concettuale di quegli studenti che riescono a superarla. L'analogia sembra forte ed allettante.

Bibliografia

Aglì F., D'Amore B. (1995). *L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia*. Milano: Juvenilia.

Artigue M. (1989). *Epistémologie et didactique*. IREM. Paris VII.

Artigue M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10, 2-3, 241-286.

Artigue M. (1992). Didactic engineering. In: Douady R., Mercier A. (eds.). Research in didactique of mathematics: Selected papers (Special issue). *Recherches en didactique des mathématiques*. 12, 41-65.

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (1994). *L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Quaderno n° 6. Progetto Strategico CNR “Tecnologie e innovazioni didattiche”. Pavia.

Bachelard G. (1938). *La formation de l’esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Bazzini L. (1995). Il pensiero analogico nell'apprendimento della matematica: considerazioni teoriche e didattiche. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 2, 107-130.

Berg C.A., Phillips D.G. (1994). An investigation of the relationship between logical thinking structures and the ability to construct and interpret line graphs. *Journal of research in science teaching*. 27, 803-815.

Billio R., Bortot S., Caccamo I., Giampieretti M., Lorenzoni C., Rubino R., Tripodi M. (1993). Sul problema degli ostacoli intuitivi nell’uso dell’addizione. *La matematica e la sua didattica*. 4, 368-386.

Bonotto C. (1992). Uno studio sul concetto di numero decimale e di numero razionale. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 15, 5, 415-448.

Brousseau G. (1976-1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre de la C.I.E.A.E.M.: *La problematique de l’enseigmente des mathématiques.* Belgique: Louvain la Neuve. 101-117. [Ripubblicato su: *Recherches en didactique des mathématiques.* 4, 2, 1983, 165-198].

Brown J.S., Burton R.R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive science*. 2(2), 155-192.

Brown D.E., Clement J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: abstract transfer versus explanatory model construction. *Instructional Science*. 18, 237-261.

Clement J. (1982). Algebra word problems solutions: thought processes underlying a common misconception. *Journal for research in mathematics education*. 13, 36-46.

Clement J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on learning problems in mathematics*. 11(1-2), 77-87.

D’Amore B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell’attività di problem solving*. Milano: Angeli. II ed. it. 1996. [Ed. in lingua spagnola: Madrid, Sintesis, 1996].

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (2001). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30.
D'Amore B. (2002). La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica. *Scuola & Città.* Firenze: La Nuova Italia. 4, 56-82.
D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.* Pitagora: Bologna.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Gabellini G., Marazzani I., Masi F., Sbaragli S. (2004). *Infanzia e matematica. Didattica della matematica nella scuola dell'infanzia*. Bologna: Pitagora.
Deri M., Sainati Nello M., Sciolis Marino M. (1983). Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 6, 6, 6-27.
Di Sessa A. (1983). Phenomenology and the evolution of intuition. In: Gentner D., Stevens A. (eds.) (1983). *Mental models*. Hillsdale, N.J.: Laurence Erlabaum. 15-33.
Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.
Fischbein E. (1985a). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI. 8-19.
Fischbein E. (1985b). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132.
Fischbein E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics.* Dordrecht: D. Reidel Publ. Company.
Fischbein E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning or Mathematics.* 2, 9-14.
Fischbein E. (1992a). Modelli taciti e ragionamento matematico. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. A cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora. 25-38.

Fischbein E. (1992b). Intuizione e dimostrazione. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. A cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora. 1-24.

Fischbein E. (1992c). Intuizione e processo informativo nell'attività matematica. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. A cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora. 51-74.

Fischbein E., Sainati Nello M., Sciolsi Marino M. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational studies in mathematics*. 22, 523-549.

Furinghetti F., Paola D. (1991). The construction of a didactic itinerary of calculus starting from the students' concept images (age 16-19). *International journal mathematical education in science and technology*. 22, 719-729.

Gagatsis A. (2003). *Comprensione e apprendimento in matematica*. Bologna: Pitagora.

Gardner H. (1991). *Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico*. Feltrinelli 1993. I ed. orginale USA 1991.

Giovannini A. (Enriques F.) (1942). L'errore nelle matematiche. *Periodico di matematiche*, IV. XXII.

Kahneman D., Tversky A. (1982). On the study of statistical intuitions. In: Kahneman D., Slovic P., Tversky A. (eds.). *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press. 493-508.

Kieran C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in mathematics*. 12. 317-326.

Kieran C. (1983). Relationships between novices' views of algebraic letters and their use of symmetric and asymmetric equation-solving procedures. In: Bergeron J.C., Herscovics N. (eds.) (1983). *Proceedings of the fifth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Montreal: University of Montreal. 1, 161-168.

Lecoutre M.P., Fischbein E. (1998). Évolution avec l'âge de "misconceptions" dans les intuitions probabilistes en France et Israël. *Recherches en didactique des mathématiques*. 18, 3, 311-332.

Malara N.A. (2003). Opinioni sull'algebra di futuri insegnanti: incidenza del retroterra culturale. *La matematica e la sua didattica.* 1, 17-42.

Mc Closkey M. (1983). Intuitive physics. *Scientific american*. 114-122.

Perrin-Glorian M.J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds). (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud.* Grenoble: La pensée sauvage. 97-147.

Piaget J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives.* Paris: PUF.

Robutti O. (2003). Il senso del grafico con la mediazione delle tecnologie: metafore attivate e significati costruiti. *La matematica e la sua didattica.* 2, 173-195.

Sbaragli S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica.* 1. **PAGINE**

Schoenfeld A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

Shaughnessy J.M. (1985). Problem-Solving derailers: The influence of misconceptions on problem-solving performance. In: Silver E.A. (ed.) (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving*: *Multiple research perspectives.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 399-415.

Silver E.A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: some under represented themes and needed directions. In: Silver E.A. (ed.) (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving*. *Multiple research perspectives.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 247-266.

Vergnaud G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems. In: Carpenter T.P., Moser J.M., Romberg T.A. (eds.) (1982). *Addition and substraction*. Hillsdale N.J.: Lawrence Erlbaum. 39-59.

Voss J. F.., Blais J., Means M.L., Greene T.R., Ahwesh E. (1989). Informal reasoning and subject matter knowledge in the solving of economics problems by naïve and novice individuals. In: Resnick L.B. (ed.). *Knowing, learning and instruction: Essays in honor of Robert Glaser.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 217-250.

Wagner S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal for research in mathematics education*. 12, 107-118.

Wagner S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher*. 76, 474-479.

Zan R. (1998). *Problemi e convinzioni.* Bologna: Pitagora.

Zan R. (2000). "Misconceptions" e difficoltà in matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 23, 1, 45-68.

Zan R. (2002). *Verso una teoria per le difficoltà in matematica. Contributo al dibattito sulla formazione del ricercatore in didattica*. Materiale del Seminario Nazionale 2002. http://www.dm.unito.it/semdidattica/index.html

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano le colleghe ed amiche Rosetta Zan e Colette Laborde per i preziosi suggerimenti.

Ringraziano inoltre i tre referee per l'occasione che hanno fornito di riflettere su alcuni punti dell'articolo.